



AGH

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE**

Wytrzymałość elementów maszyn

Wykład Nr 4

Metody energetyczne

energia sprężysta w prętach rozciąganych/ściskanych, skręcanych lub zginanych; siły uogólnione i współrzędne uogólnione; układy Clapeyrona; twierdzenie o wzajemności prac i przemieszczeń (Bettiego); twierdzenie o wzajemności przemieszczeń (Maxwella); twierdzenie Castigliana, siły dodatkowe; twierdzenie Menabrea i jego zastosowanie; zasada symetrii i antysymetrii; przykłady obliczeniowe.

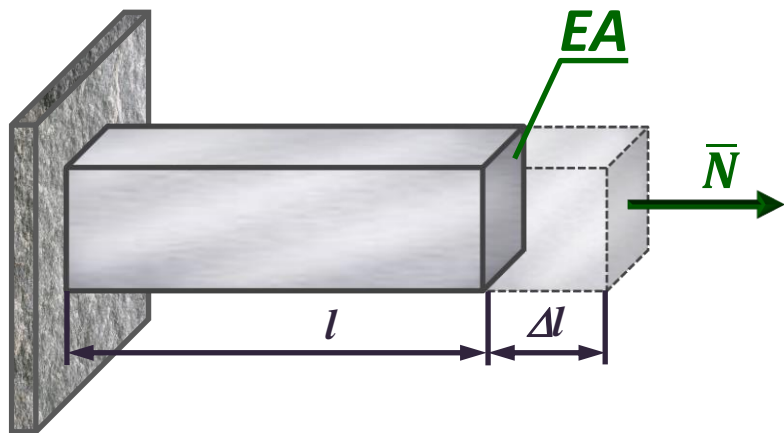
**Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Projektowania i Eksploatacji Maszyn**

dr hab. inż. Tomasz Machniewicz, prof. AGH

machniew@agh.edu.pl

4.1. Energia sprężysta w prętach prostych

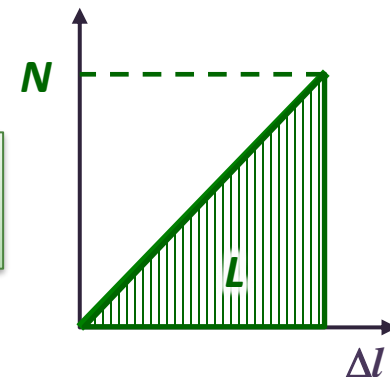
4.1.1. Rozciąganie:



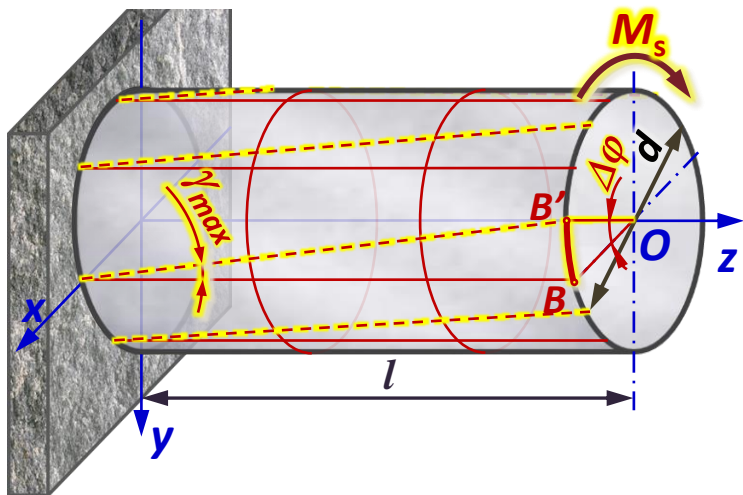
$$U = L = \frac{1}{2} N \Delta l$$

$$\Delta l = \frac{Nl}{AE}$$

$$U = \frac{N^2 l}{2EA}$$



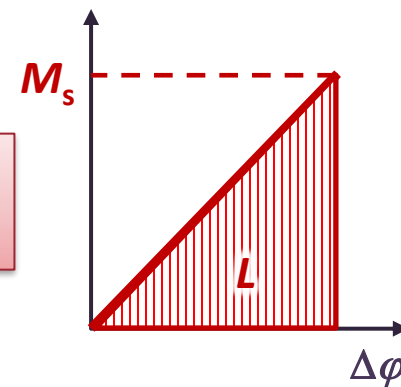
4.1.2. Skręcanie:



$$U = L = \frac{1}{2} M_s \Delta \varphi$$

$$\Delta \varphi = \frac{M_s l}{J_0 G}$$

$$U = \frac{M_s^2 l}{2J_0 G}$$

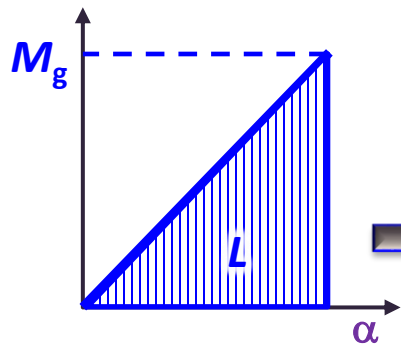
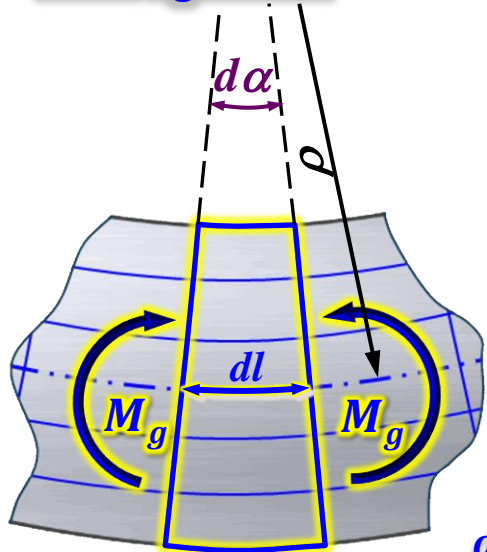




AGH

4.1. Energia sprężysta w prętach prostych

4.1.3. Zginanie:



$$dU = dL = \frac{1}{2} M_g d\alpha$$

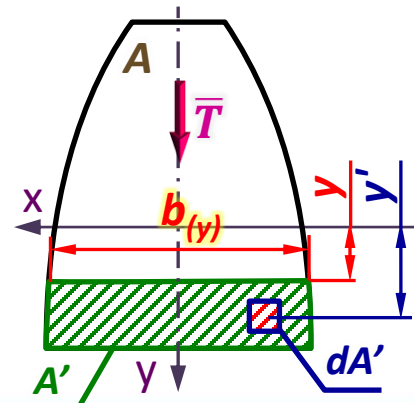
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_g}{E \cdot J_x} \Rightarrow d\alpha = \frac{M_g}{E \cdot J_x} dl$$

$$dl = d\alpha \cdot \rho \Rightarrow d\alpha = \frac{1}{\rho} dl$$

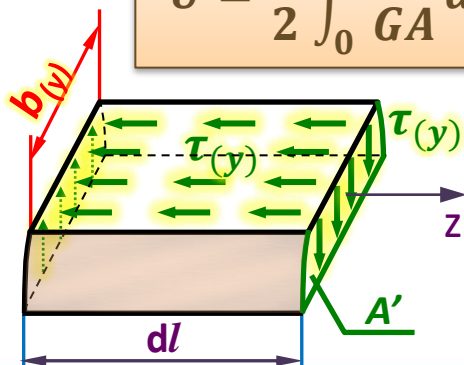
$$dU = \frac{M_g^2}{2EJ_x} dl$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_g^2}{EJ_x} dl$$

4.1.4. Ścinanie:



$$U = \frac{\psi}{2} \int_0^l \frac{T^2}{GA} dl$$



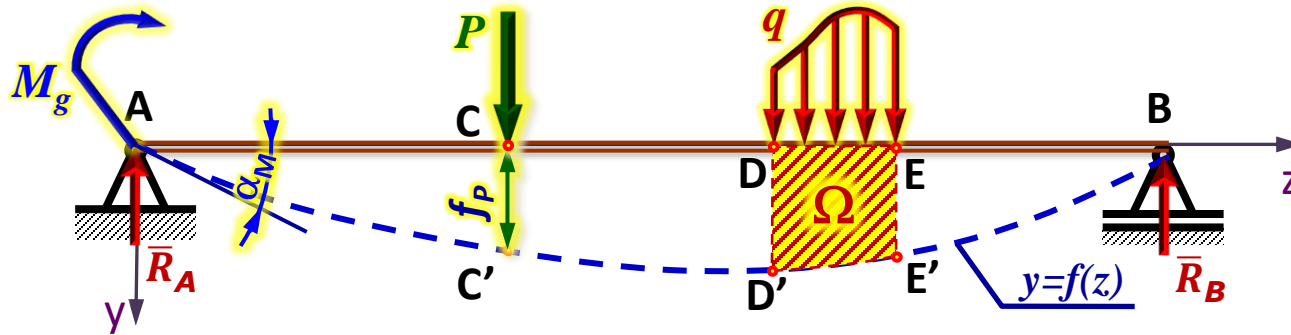
gdzie: ψ - funkcja kształtu przekroju poprzecznego:

$$\psi = \frac{A}{J_x^2} \int_A \left(\frac{S_x(y)}{b_y} \right)^2 dA$$

Ponieważ wartość energii ścinania jest na ogół bardzo mała w porównaniu z pozostałymi przypadkami obciążeń, jest ona najczęściej pomijana przy obliczaniu całkowitej energii odkształcenia sprężystego.

4.2. Siły i przemieszczenia uogólnione

Siłą uogólnioną nazywa się dowolne obciążenie zewnętrzne działające na dane ciało, a więc może nią być: siła skupiona (P), moment siły (M_g lub M_s) lub obciążenie ciągłe (q).

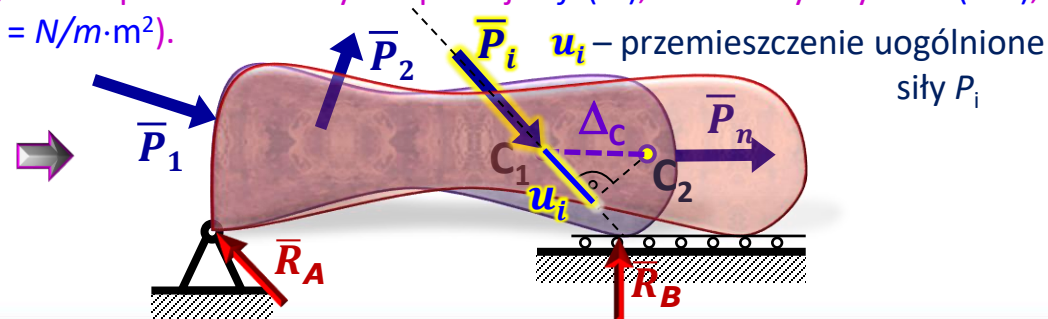


Przemieszczenie uogólnione (u) – dowolny rodzaj przemieszczenia odpowiadający danej sile uogólnionej, mierzony na kierunku działania tej siły.

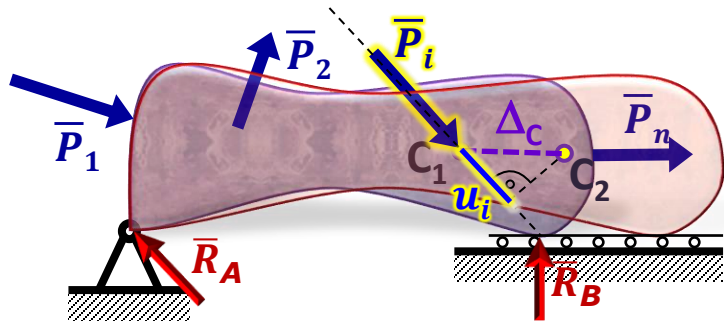
Przemieszczeniem uogólnionym od siły skupionej (P), momentu siły (M) i obciążenia ciągłego (q), będą więc odpowiednio: przesunięcie liniowe (f_P), kąt obrotu (α_M), pole przemieszczeń ($\Omega_{D-E-D'-E'}$).

UWAGA:

- Iloczyn siły uogólnionej i przemieszczenia uogólnionego ma miano pracy/energii ($J=N \cdot m$), stąd wynika odpowiednia jednostka danego przemieszczenia uogólnionego, dla odpowiednio: siły skupionej – f (m), momenty siły – α (rad), obciążenia ciągłego – Ω (m^2) (bo: $J = N \cdot m = Nm \cdot rad = N/m \cdot m^2$).
- Przemieszczenie uogólnione (u_i) odpowiada tylko tej składowej całkowitego przemieszczenia (Δ), która jest zgodna z kierunkiem działania rozważanej siły uogólnionej (\bar{P}_i).



4.3. Układy Clapeyrona



Zgodnie z zasadą superpozycji, przemieszczenie dowolnego punktu (Δ) jest sumą przemieszczeń (Δ_i) wywołanych poszczególnymi siłami uogólnionymi (P_i):

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_i + \dots + \Delta_n$$

Można to wyrazić jako:

$$\Delta = \delta_1 P_1 + \delta_2 P_2 + \dots + \delta_i P_i + \dots + \delta_n P_n$$

gdzie współczynniki $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ określają wpływ jaki wywiera odpowiednia siła na przemieszczenie sprężyste Δ .

Układy dla których prawdziwa jest powyższa zależność nazywa się układami liniowo-sprężystymi lub układami Clapeyrona *.

* Benoit Paul Emil Clapeyron (1799-1864)

Aby dany układ można traktować jako **układ Clapeyrona**, spełnione być muszą następujące warunki:

- ✓ układ jest liniowy: materiał idealnie sprężysty, brak sił tarcia,
- ✓ działanie jednych sił nie zmienia charakteru działania innych (zachodzi zasada superpozycji),
- ✓ kierunki działania uogólnionych sił nie zmieniają się wraz z deformacją układu (przemieszczenia układu są niewielkie w stosunku do jego rozmiarów).

Związki podobne jak wyżej, ważne są także dla dowolnej składowej przemieszczenia danego punktu, a w szczególności dla przemieszczenia uogólnionego u_i (tj. przemieszczenia punktu przyłożenia siły P_i na kierunku jej działania):

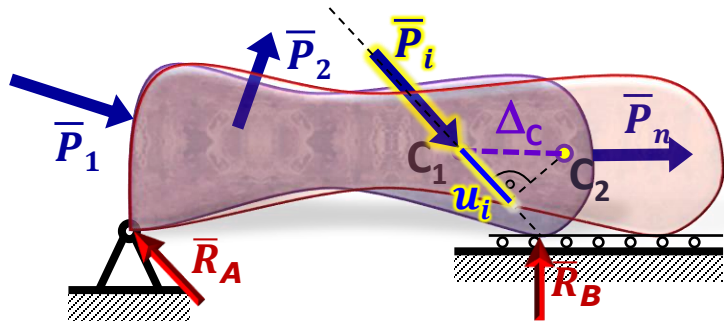
$$u_i = u_{i1} + u_{i2} + \dots + u_{ik} + \dots + u_{in} = \sum_{k=1}^n u_{ik}$$

gdzie: u_{ik} - część przemieszczenia u_i wywołana siłą P_k ,

$$u_i = \delta_{i1} P_1 + \delta_{i2} P_2 + \dots + \delta_{ik} P_k + \dots + \delta_{in} P_n = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} P_k$$

δ_{ik} - liczba wpływowa siły P_k na przemieszczeniu u_i , tj. wartość przemieszczenia u_i wywołana siłą $P_k = 1$.

4.4. Energia sprężysta układów Clapeyrona



Jeżeli układ zostanie obciążony w sposób statyczny, tak że siły wzrastać będą równocześnie w tempie proporcjonalnym od wartości zerowej do maksymalnej, to praca wszystkich sił obciążających (L), równa całkowitej energii rozpatrywanego układu (U), wynosi:

$$U = L = \frac{1}{2} (P_1 u_1 + P_2 u_2 + \dots + P_i u_i + \dots + P_n u_n)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i u_i$$

Uwzględniając: $u_i = \delta_{i1} P_1 + \delta_{i2} P_2 + \dots + \delta_{ik} P_k + \dots + \delta_{in} P_n = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} P_k$

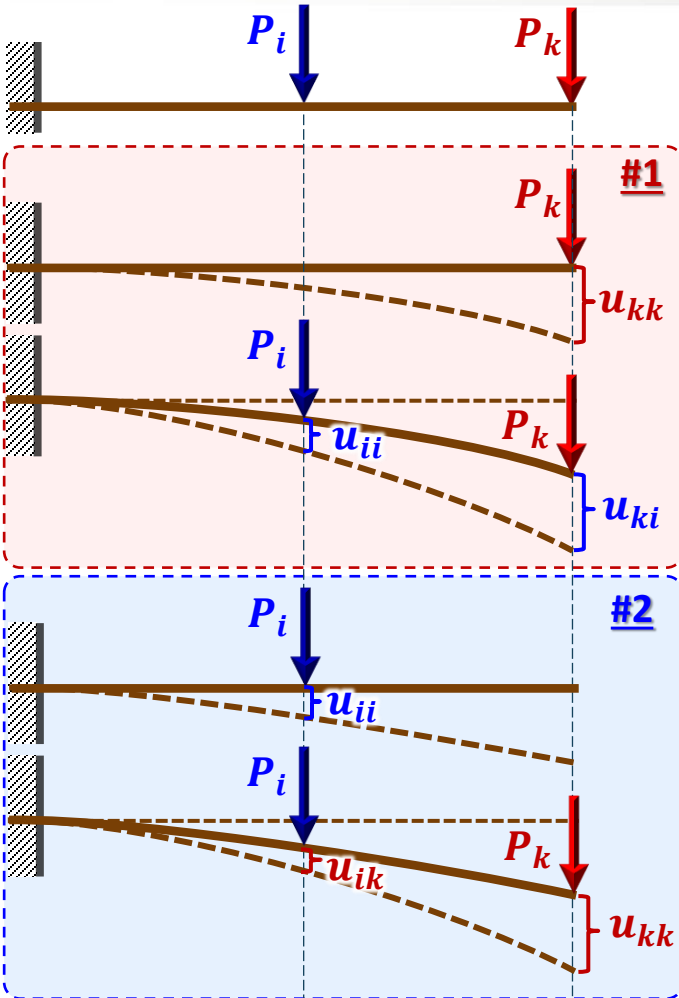
$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(P_i \sum_{k=1}^n \delta_{ik} P_k \right) \Rightarrow U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{ik} P_k P_i$$

Energia sprężysta układu Clapeyrona jest jednorodną kwadratową funkcją obciążeń*.

*Oznacza to, że zwiększenie obciążenia n -razy powoduje wzrost energii (n^2) – razy.

Wynika stąd, że obliczając energię nie można stosować zasady superpozycji; praca kilku sił zewnętrznych działających łącznie nie jest równa sumie prac tych sił działających oddzielnie.

4.5. Twierdzenie Bettiego (o wzajemności prac i przemieszczeń)

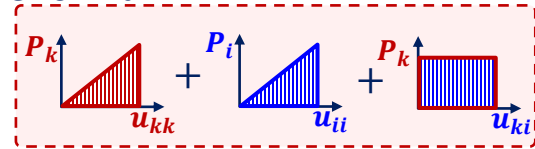


Rozważamy pracę sił przyłożonych do belki jak na rysunku:

Przypadek #1: najpierw przyłożono obciążenie P_k , a następnie P_i

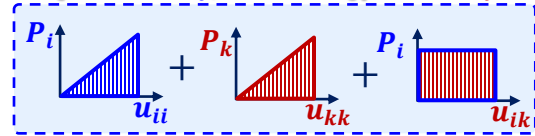
Całkowita energia sprężysta układu będzie równa:

$$U = L_1 = \frac{1}{2} P_k u_{kk} + \frac{1}{2} P_i u_{ii} + P_k u_{ki}$$



Przypadek #2: najpierw przyłożono obciążenie P_i , a następnie P_k

$$U = L_2 = \frac{1}{2} P_i u_{ii} + \frac{1}{2} P_k u_{kk} + P_i u_{ik}$$



Energia sprężysta zgromadzona w układzie nie może zależeć od kolejności przyłożenia obciążenia ($U = L_1 = L_2$), stąd:

$$U = L_1 = \cancel{\frac{1}{2} P_k u_{kk}} + \cancel{\frac{1}{2} P_i u_{ii}} + P_k u_{ki} = L_2 = \cancel{\frac{1}{2} P_i u_{ii}} + \cancel{\frac{1}{2} P_k u_{kk}} + P_i u_{ik}$$

↳ $P_k u_{ki} = P_i u_{ik}$ - co można rozszerzyć na dwa układy sił P_k i P_i :

twierdzenie Bettiego

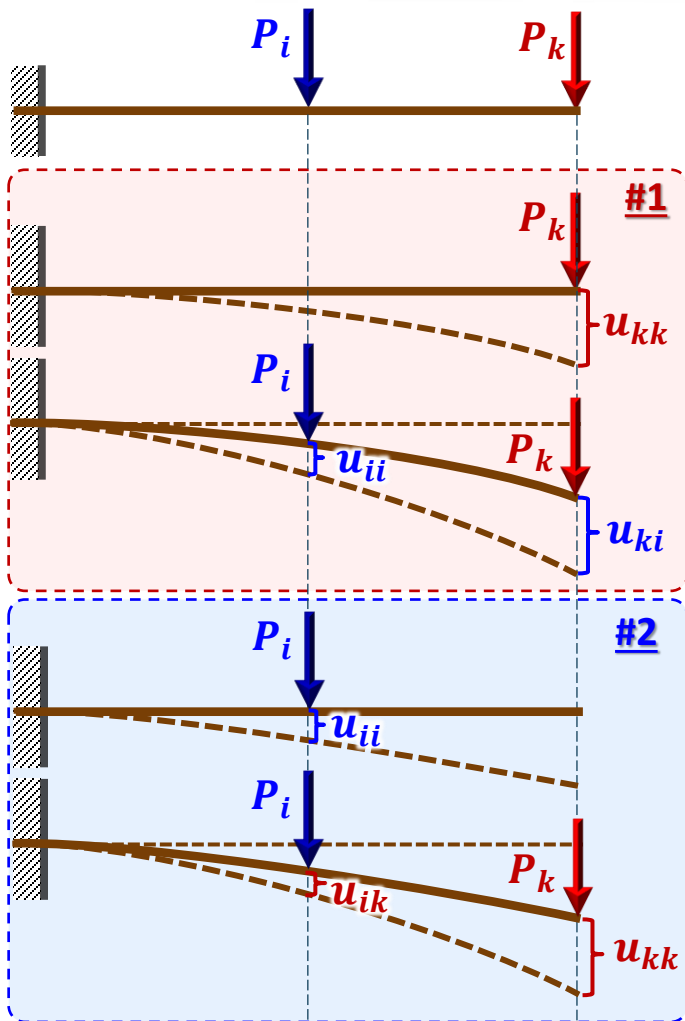
$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n P_k u_{ki} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n P_i u_{ik}$$

Enrico Betti (1823-1992) - włoski matematyk i fizyk.

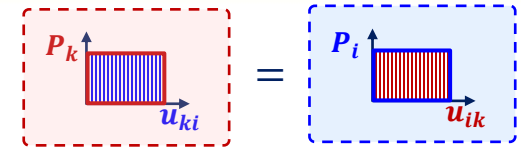


Suma prac sił układu pierwszego $\{P_k\}$ na odpowiadających im przemieszczeniach uogólnionych wywołanych siłami układu drugiego $\{P_i\}$, jest równa sumie prac sił układu drugiego $\{P_i\}$ na odpowiadających im uogólnionych przemieszczeniach wywołanych siłami układu pierwszego $\{P_k\}$.

4.6. Twierdzenie Maxwella (o wzajemności przemieszczeń)



$$P_k u_{ki} = P_i u_{ik}$$



jeżeli $P_k = P_i$, wówczas $u_{ki} = u_{ik}$

Twierdzenie Maxwella:

Jeżeli na układ liniowo-sprężysty działają dwie, równe co do wartości uogólnione siły ($P_k = P_i$), to przemieszczenie uogólnione odpowiadające pierwszej, wywołane przez drugą z nich (u_{ik}) jest równe przemieszczeniu uogólnionemu drugiej, wywołanemu przez pierwszą (u_{ki}).

$$P_k u_{ki} = P_i u_{ik}$$

$$u_{ki} = \delta_{ki} \cdot P_i$$

$$u_{ik} = \delta_{ik} \cdot P_k$$

$$\Rightarrow P_k \cdot \delta_{ki} \cdot P_i = P_i \cdot \delta_{ik} \cdot P_k$$



$$\delta_{ki} = \delta_{ik}$$

Inaczej mówiąc:

James Clerk Maxwell
(1831–1879) szkocki
fizyk i matematyk



Liczba wpływowa uogólnionej siły P_k na uogólnionym przemieszczeniu punktu przyłożenia siły P_i , jest równa liczbie wpływowej uogólnionej siły P_i na uogólnionym przemieszczeniu punktu przyłożenia siły P_k .

4.7. Twierdzenie Castigliano

Rozwinięcie zależności na energię sprężystą układów Clapeyrona (por. p. 4.4): $U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{ik} P_k P_i$

$$U = \frac{1}{2} \left(\delta_{11} P_1^2 + \delta_{12} P_1 P_2 + \dots + \delta_{1n} P_1 P_n + \delta_{21} P_2 P_1 + \delta_{22} P_2^2 + \dots + \delta_{2n} P_2 P_n + \dots \right. \\ \left. + \delta_{n1} P_n P_1 + \delta_{n2} P_n P_2 + \dots + \delta_{nn} P_n^2 \right)$$

Zgodnie z twierdzeniem Maxwella: $\delta_{12} = \delta_{21}; \delta_{13} = \delta_{31}; \dots \delta_{ki} = \delta_{ik}; \dots \delta_{in} = \delta_{ni}; \dots$

$$U = \frac{1}{2} (\delta_{11} P_1^2 + \delta_{22} P_2^2 + \dots + \delta_{nn} P_n^2 + 2\delta_{12} P_1 P_2 + \dots + 2\delta_{1n} P_1 P_n + \dots + 2\delta_{(n-1)n} P_{(n-1)} P_n)$$

Różniczka po sile P_1 : $\frac{\partial U}{\partial P_1} = \delta_{11} P_1 + \delta_{12} P_2 + \delta_{13} P_3 \dots + \delta_{1i} P_i + \dots + \delta_{1n} P_n = u_1$ - por. p. 4.4.

Podobną zależność otrzymać można dla dowolnej siły uogólnionej P_i , co jest treścią **twierdzenia Castigliano***:

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = u_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Pochodna cząstkowa energii układu liniowo-sprężystego względem dowolnej siły uogólnionej działającej na ten układ, jest równa uogólnionemu przemieszczeniu punktu przyłożenia tej siły.



*Carlo Alberto Castigliano (1847-1884)
– włoski inżynier kolejowy

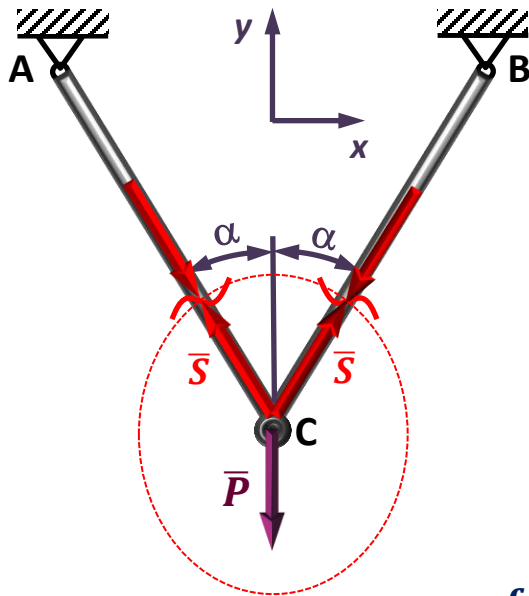
4.8. Twierdzenie Castigliano – zastosowanie

Przykład 4.1:

Obliczyć pionowe przemieszczenie punktu C konstrukcji jak na rysunku.

Dane: $P=21.6 \text{ kN}$, $\alpha=30^\circ$, $d=12 \text{ mm}$, $E=2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $|AC|=|BC|=l=1.2 \text{ m}$

Szukane:
 $f_c=?$



$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \Rightarrow 2S \cos \alpha - P = 0 \rightarrow S = \frac{P}{2 \cos \alpha}$$

$$\Delta l = \frac{S \cdot l}{A \cdot E} = \frac{4 \cdot S \cdot l}{\pi \cdot d^2 \cdot E}$$

$$U = 2 \cdot \frac{1}{2} S \Delta l = S \cdot \Delta l$$

$$\Rightarrow U = \frac{P}{2 \cos \alpha} \cdot \frac{4 \cdot P \cdot l}{2 \cos \alpha \cdot \pi \cdot d^2 \cdot E} = \frac{P^2 \cdot l}{\cos^2 \alpha \cdot d^2 \cdot \pi \cdot E}$$

$$f_c = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{2P \cdot l}{\cos^2 \alpha \cdot d^2 \cdot \pi \cdot E} = \frac{2 \cdot 21\,600 \cdot 1200}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot 12^2 \cdot \pi \cdot 2.1 \cdot 10^5}$$

$$f_c = 0.7275 \text{ mm}$$

- por. z wynikiem z Podstaw wytrzymałości materiałów (Wykład 2, przykład 2.2)

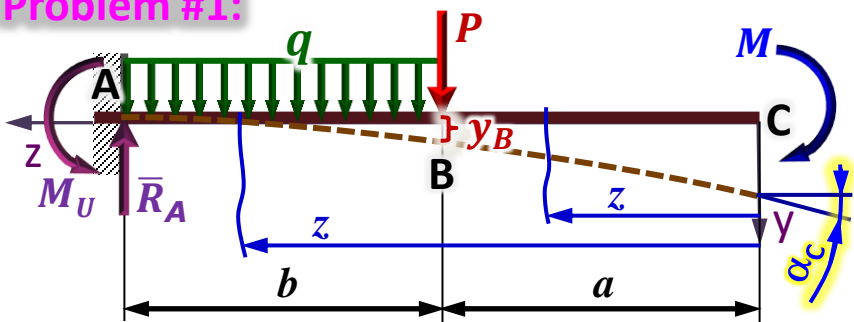


AGH

4.8. Twierdzenie Castigliano – zastosowanie

Typowe problemy obliczeniowe :

Problem #1:



Dane: EJ, a, b, q, P, M

Szukane: y_B, α_C

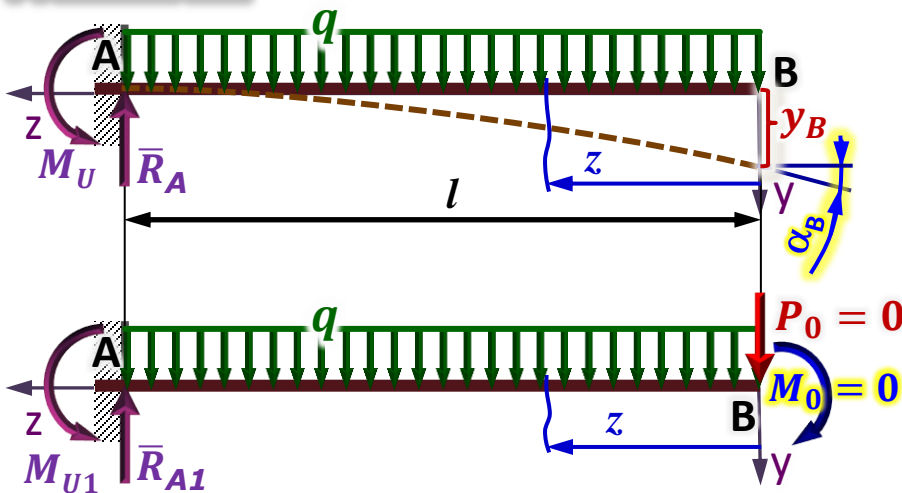
$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_g^2}{EJ_x} dl$$

$$U = \frac{1}{2EJ_x} \left(\int_0^a (-M)^2 dz + \int_a^{a+b} \left(-M - P(z-a) - q \frac{(z-a)^2}{2} \right)^2 dz \right)$$

$$y_B = \frac{\partial U}{\partial P} \quad \alpha_C = \frac{\partial U}{\partial M}$$

UWAGA: Dodatnia wartość obliczonego uogólnionego przemieszczenia (y_B lub α_C) oznacza, że jest ono zgodne z kierunkiem działającej w tym punkcie siły uogólnionej (odpowiednio: P lub M), ujemna – że jest ono przeciwne.

Problem #2:



Dane: EJ, l, q

Szukane: y_B, α_B

PROBLEM: $y_B = \frac{\partial U}{\partial ?}$ $\alpha_B = \frac{\partial U}{\partial ?}$

Brak odpowiednich sił uogólnionych w punktach szukanych przemieszczeń.

ROZWIĄZANIE:

- W punkcie szukanego przemieszczenia uogólnionego przykładamy odpowiednią siłę uogólnioną o wartości równej zero ($P_0=0, M_0=0$).
- Wyprowadzamy wzór na całkowitą energię sprężystą, traktując dodane siły uogólnione jak rzeczywiste.

$$y_B = \frac{\partial U}{\partial P_0} \quad \alpha_B = \frac{\partial U}{\partial M_0}$$

③ Wyprowadzamy równania na szukane przemieszczenia uogólnione:

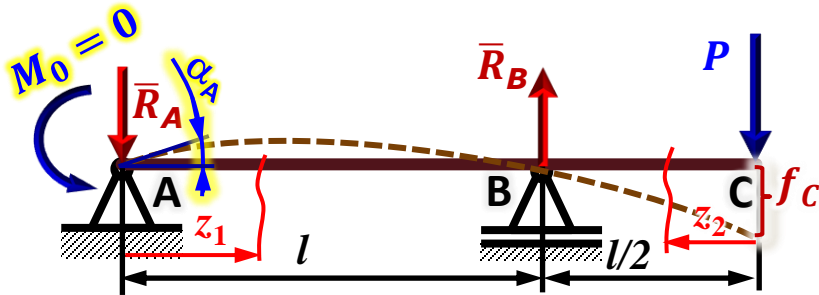
④ Obliczamy szukane przemieszczenia uogólnione (y_B, α_B), podstawiając dane liczbowe, w tym: $P_0=0, M_0=0$

4.8. Twierdzenie Castigliano – zastosowanie

Przykład 4.2:

Stosując twierdzenie Castigliano obliczyć kąt obrotu w punkcie A oraz ugięcie końca C belki jak na rysunku.

Dane: EJ, P, l Szukane: α_A, f_C



1° Uogólnione siły dodatkowe:

W punkcie A przykładamy dodatkowo moment $M_0=0$, co umożliwi obliczenie α_A .

2° Reakcje:

$$\sum_{i=1}^n M_{iB} = 0 \Rightarrow M_0 + R_A l - P \frac{l}{2} = 0$$

$$\hookrightarrow R_A = \frac{P}{2} - \frac{M_0}{l}$$

UWAGA: Nie podstawiamy $M_0 = 0$ aby zachować możliwość różniczkowania energii po M_0 .

3° Równania momentów zginających:

$$0 \leq z_1 \leq l/2: M_{g(z_1)} = -M_0 + R_A z_1 = -M_0 - \frac{P}{2} z_1 + \frac{M_0}{l} z_1 \quad 0 \leq z_2 \leq l/2: M_{g(z_2)} = -P z_2$$

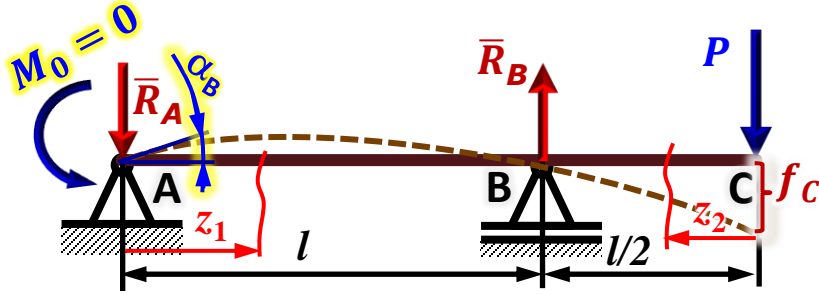
4° Zależność na energię całkowitą układu:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_g^2}{EJ_x} dl = \frac{1}{2EJ_x} \left(\int_0^{l/2} M_{g(z_1)}^2 dz_1 + \int_0^{l/2} M_{g(z_2)}^2 dz_2 \right)$$

$$= \frac{1}{2EJ_x} \left(\int_0^{l/2} \left(-M_0 - \frac{P}{2} z_1 + \frac{M_0}{l} z_1 \right) \left(-M_0 - \frac{P}{2} z_1 + \frac{M_0}{l} z_1 \right) dz_1 + \int_0^{l/2} (-P z_2)^2 dz_2 \right) =$$

4.8. Twierdzenie Castigliano – zastosowanie

Przykład 4.2:



Dane: EJ, P, l Szukane: α_A, f_C

4° Zależność na energię całkowitą układu:

$$U = \frac{1}{2EJ_x} \left(\int_0^l \left(M_0^2 + M_0 \frac{P}{2} z_1 - \frac{M_0^2}{l} z_1 + M_0 \frac{P}{2} z_1 + \frac{P^2}{4} z_1^2 - \frac{PM_0}{2l} z_1^2 - \frac{M_0^2}{l} z_1 - \frac{PM_0}{2l} z_1^2 + \frac{M_0^2}{l^2} z_1^2 \right) dz_1 + \int_0^{l/2} P^2 z_2^2 dz_2 \right)$$

$$\hookrightarrow U = \frac{1}{2EJ_x} \left(\int_0^l \left(M_0^2 + M_0 P z_1 - 2 \frac{M_0^2}{l} z_1 + \frac{P^2}{4} z_1^2 - \frac{PM_0}{l} z_1^2 + \frac{M_0^2}{l^2} z_1^2 \right) dz_1 + \int_0^{l/2} P^2 z_2^2 dz_2 \right)$$

$$\hookrightarrow U = \frac{1}{2EJ_x} \left(\cancel{M_0^2 l} + \frac{M_0 P l^2}{2} - \cancel{M_0^2 l} + \frac{P^2 l^3}{12} - \frac{M_0 P l^2}{3} + \frac{M_0^2 l}{3} + \frac{P^2 l^3}{24} \right) = \frac{1}{2EJ_x} \left(\frac{M_0 P l^2}{6} + \frac{P^2 l^3}{8} + \frac{M_0^2 l}{3} \right)$$

Żmudne obliczenia – można prościej – por. przykład 4.3

5° Szukane odkształcenia:

$$f_C = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{2EJ_x} \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{M_0 P l^2}{6} + \frac{P^2 l^3}{8} + \frac{M_0^2 l}{3} \right) = \frac{1}{2EJ_x} \left(\frac{M_0 l^2}{6} + \frac{P l^2}{4} \right) \xrightarrow{M_0=0} f_C = \frac{P l^2}{8EJ_x}$$

$$\alpha_A = \frac{\partial U}{\partial M_0} = \frac{1}{2EJ_x} \frac{\partial}{\partial M_0} \left(\frac{M_0 P l^2}{6} + \frac{P^2 l^3}{8} + \frac{M_0^2 l}{3} \right) = \frac{1}{2EJ_x} \left(\frac{P l^2}{6} + \frac{2 M_0 l}{3} \right) \xrightarrow{M_0=0} \alpha_A = \frac{P l^2}{12EJ_x}$$

4.8. Twierdzenie Castigliano – zastosowanie

W przypadku prętów zginanych można znacznie uprościć obliczenia matematyczne, wyznaczając pochodną energii sprężystej układu na drodze różniczkowania funkcji podcałkowej. Dzięki temu nie ma potrzeby podnoszenia do kwadratu funkcji momentu gnącego (por. poprzedni przykład), gdyż nie jest potrzebne wyrażenie na energię (U) lecz pochodna cząstkowa tej energii względem siły uogólnionej ($\frac{\partial U}{\partial P_i}$).

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \frac{\partial U}{\partial P_i} \\ U &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_g^2}{EJ_x} dl \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial P_i} \int_0^l \frac{M_g^2}{EJ_x} dl \left. \begin{aligned} & \text{dla: } EJ_x = \text{const.} \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_i = \frac{1}{2EJ_x} \int_0^l \frac{\partial(M_g^2)}{\partial P_i} dl$$

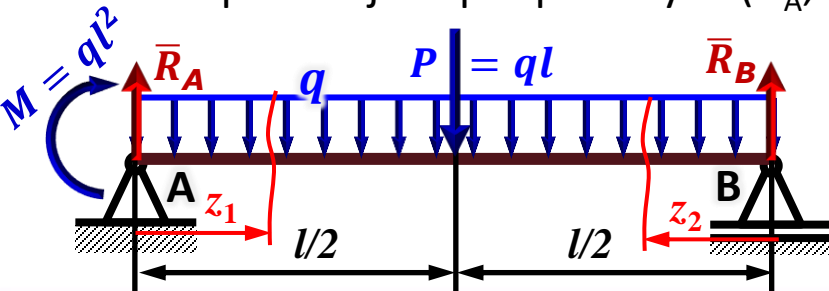
$$\hookrightarrow u_i = \frac{1}{EJ_x} \int_0^l M_g \frac{\partial(M_g)}{\partial P_i} dl$$

Ostatecznie, **twierdzenie Castigliano dla przypadków zginania belek:**

$$u_i = \frac{1}{EJ_x} \int_0^l M_g \frac{\partial(M_g)}{\partial P_i} dl$$

Przykład 4.3:

Stosując twierdzenie Castigliano obliczyć ugięcie środka belki jak na rysunku ($y_{(l/2)}$) oraz kąty obrotu w przekrojach podporowych (α_A, α_B).



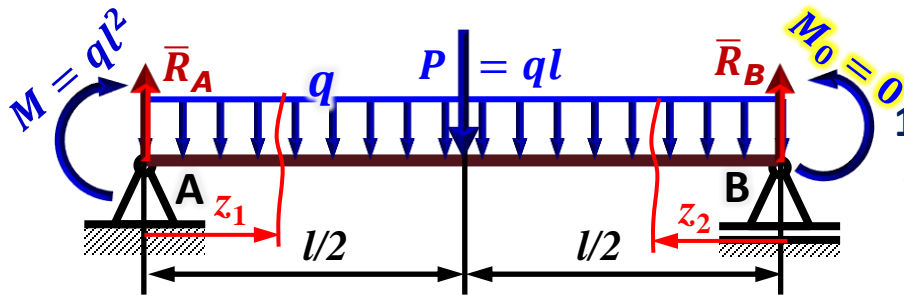
Dane: EJ, q, l Szukane: $f_{(l/2)}, \alpha_A, \alpha_B$



AGH

4.8. Twierdzenie Castigliano – zastosowanie

Przykład 4.3:



Dane: EJ, q, l Szukane: $f_{(l/2)}, \alpha_A, \alpha_B$

1° Uogólnione siły dodatkowe:

W punkcie B przykładamy dodatkowo moment $M_0=0$, co umożliwi obliczenie α_B .

2° Reakcje: $\sum_{i=1}^n M_{iB} = 0 \Rightarrow -M - R_A l + ql \frac{l}{2} + P \frac{l}{2} + M_0 = 0 \Rightarrow R_A = \frac{ql}{2} + \frac{P}{2} - \frac{M}{l} + \frac{M_0}{l}$

$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \Rightarrow R_A - P - ql + R_B = 0 \Rightarrow R_B = P + ql - R_A = \frac{P}{2} + \frac{ql}{2} + \frac{M}{l} - \frac{M_0}{l}$

UWAGA: Nie podstawiamy ($P = ql, M = ql^2, M_0 = 0$), aby zachować możliwość różniczkowania energii po P, M, M_0 .

2° Równania momentów zginających i ich pochodnych:

$0 \leq z_1 \leq l/2:$

$$M_{g(z_1)} = M + R_A z_1 - q \frac{z_1^2}{2}$$

$$M_{g(z_1)} = M + \frac{ql}{2} z_1 + \frac{P}{2} z_1 - \frac{M}{l} z_1 + \frac{M_0}{l} z_1 - q \frac{z_1^2}{2}$$

$$\frac{\partial(M_{g(z_1)})}{\partial M} = 1 - \frac{z_1}{l}; \frac{\partial(M_{g(z_1)})}{\partial P} = \frac{z_1}{2}; \frac{\partial(M_{g(z_1)})}{\partial M_0} = \frac{z_1}{l}$$

Uwzględniając: $P = ql, M = ql^2, M_0 = 0$:

$$M_{g(z_1)} = ql^2 - q \frac{z_1^2}{2}$$

$0 \leq z_2 \leq l/2:$

$$M_{g(z_2)} = M_0 + R_B z_2 - q \frac{z_2^2}{2}$$

$$M_{g(z_2)} = M_0 + \frac{ql}{2} z_2 + \frac{P}{2} z_2 + \frac{M}{l} z_2 - \frac{M_0}{l} z_2 - q \frac{z_2^2}{2}$$

$$\frac{\partial(M_{g(z_2)})}{\partial M} = \frac{z_2}{l}; \frac{\partial(M_{g(z_2)})}{\partial P} = \frac{z_2}{2}; \frac{\partial(M_{g(z_2)})}{\partial M_0} = 1 - \frac{z_2}{l}$$

Uwzględniając: $P = ql, M = ql^2, M_0 = 0$:

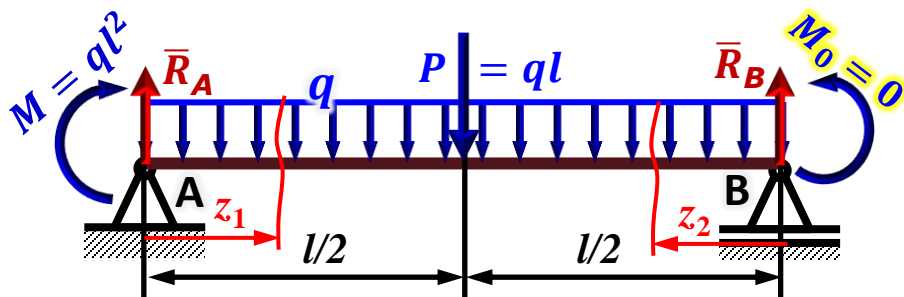
$$M_{g(z_2)} = 2ql \cdot z_2 - q \frac{z_2^2}{2}$$



AGH

4.8. Twierdzenie Castigliano – zastosowanie

Przykład 4.3:



Dane: EJ, q, l Szukane: $f_{(l/2)}, \alpha_A, \alpha_B$

2° Równania momentów zginających:

$$0 \leq z_1 \leq l/2: \quad M_{g(z_1)} = ql^2 - q \frac{z_1^2}{2}; \quad \frac{\partial(M_{g(z_1)})}{\partial M} = 1 - \frac{z_1}{l}; \quad \frac{\partial(M_{g(z_1)})}{\partial P} = \frac{z_1}{2}; \quad \frac{\partial(M_{g(z_1)})}{\partial M_0} = \frac{z_1}{l}$$

$$0 \leq z_2 \leq l/2: \quad M_{g(z_2)} = 2ql \cdot z_2 - q \frac{z_2^2}{2}; \quad \frac{\partial(M_{g(z_2)})}{\partial M} = \frac{z_2}{l}; \quad \frac{\partial(M_{g(z_2)})}{\partial P} = \frac{z_2}{2}; \quad \frac{\partial(M_{g(z_2)})}{\partial M_0} = 1 - \frac{z_2}{l}$$

3° Wyznaczanie szukanych odkształceń:

$$\begin{aligned} f_{(l/2)} &= \frac{1}{EJ_x} \int_0^l M_g \frac{\partial(M_g)}{\partial P_i} dl = \frac{1}{EJ_x} \int_0^{l/2} \left(ql^2 - q \frac{z_1^2}{2} \right) \frac{z_1}{2} dz_1 + \frac{1}{EJ_x} \int_0^{l/2} \left(2ql \cdot z_2 - q \frac{z_2^2}{2} \right) \frac{z_2}{2} dz_2 \\ &= \frac{1}{EJ_x} \int_0^{l/2} \left(\frac{ql^2}{2} z_1 - \frac{qz_1^3}{4} \right) dz_1 + \frac{1}{EJ_x} \int_0^{l/2} \left(ql \cdot z_2^2 - \frac{qz_2^3}{4} \right) dz_2 = \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{ql^4}{16} - \frac{ql^4}{256} + \frac{ql^4}{24} - \frac{ql^4}{256} \right) \\ &= \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{48ql^4}{768} - \frac{3ql^4}{768} + \frac{32ql^4}{768} - \frac{3ql^4}{768} \right) = \frac{74ql^4}{768EJ_x} \rightarrow \boxed{f_{(l/2)} = \frac{37ql^4}{384EJ_x}} \end{aligned}$$

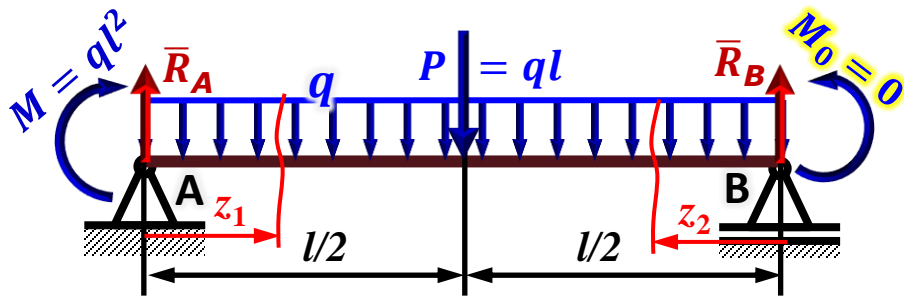
por. z przykładem 1.3 z Wykładu 1



AGH

4.8. Twierdzenie Castigliano – zastosowanie

Przykład 4.3:



Dane: EJ, q, l Szukane: $f_{(l/2)}, \alpha_A, \alpha_B$

2° Równania momentów zginających:

$$0 \leq z_1 \leq l/2: \quad M_{g(z_1)} = ql^2 - q \frac{z_1^2}{2}; \quad \frac{\partial(M_{g(z_1)})}{\partial M} = 1 - \frac{z_1}{l}; \quad \frac{\partial(M_{g(z_1)})}{\partial P} = \frac{z_1}{2}; \quad \frac{\partial(M_{g(z_1)})}{\partial M_0} = \frac{z_1}{l}$$

$$0 \leq z_2 \leq l/2: \quad M_{g(z_2)} = 2ql \cdot z_2 - q \frac{z_2^2}{2}; \quad \frac{\partial(M_{g(z_2)})}{\partial M} = \frac{z_2}{l}; \quad \frac{\partial(M_{g(z_2)})}{\partial P} = \frac{z_2}{2}; \quad \frac{\partial(M_{g(z_2)})}{\partial M_0} = 1 - \frac{z_2}{l}$$

3° Wyznaczanie szukanych odkształceń:

$$\begin{aligned} \alpha_A &= \frac{1}{EJ_x} \int_0^l M_g \frac{\partial(M_g)}{\partial M} dl = \frac{1}{EJ_x} \int_0^{l/2} \left(ql^2 - q \frac{z_1^2}{2} \right) \left(1 - \frac{z_1}{l} \right) dz_1 + \frac{1}{EJ_x} \int_0^{l/2} \left(2ql \cdot z_2 - q \frac{z_2^2}{2} \right) \frac{z_2}{l} dz_2 \\ &= \frac{1}{EJ_x} \int_0^{l/2} \left(ql^2 - \frac{qz_1^2}{2} - qlz_1 + \frac{qz_1^3}{2l} \right) dz_1 + \frac{1}{EJ_x} \int_0^{l/2} \left(2q \cdot z_2^2 - \frac{qz_2^3}{2l} \right) dz_2 = \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{ql^3}{2} - \frac{ql^3}{48} - \frac{ql^3}{8} + \frac{ql^3}{128} + \frac{ql^3}{12} - \frac{ql^3}{128} \right) \\ &= \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{24ql^3}{48} - \frac{ql^3}{48} - \frac{6ql^3}{48} + \frac{4ql^3}{48} \right) \rightarrow \alpha_A = \frac{21ql^3}{48EJ_x} \end{aligned}$$

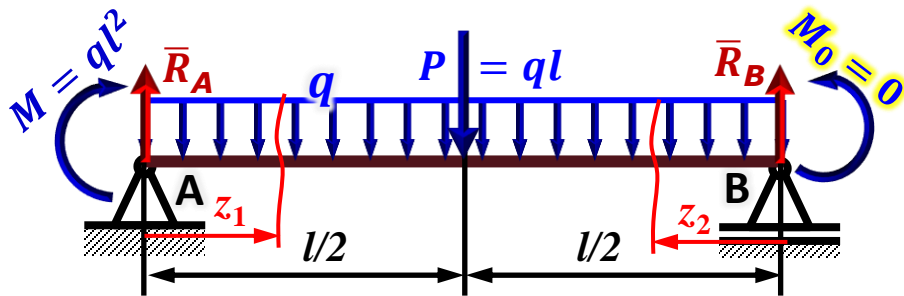
por. z przykładem 1.3 z Wykładu 1



AGH

4.8. Twierdzenie Castigliano – zastosowanie

Przykład 4.3:



Dane: EJ, q, l Szukane: $f_{(l/2)}, \alpha_A, \alpha_B$

2° Równania momentów zginających:

$$0 \leq z_1 \leq l/2: \quad M_{g(z_1)} = ql^2 - q \frac{z_1^2}{2}; \quad \frac{\partial(M_{g(z_1)})}{\partial M} = 1 - \frac{z_1}{l}; \quad \frac{\partial(M_{g(z_1)})}{\partial P} = \frac{z_1}{2}; \quad \frac{\partial(M_{g(z_1)})}{\partial M_0} = \frac{z_1}{l}$$

$$0 \leq z_2 \leq l/2: \quad M_{g(z_2)} = 2ql \cdot z_2 - q \frac{z_2^2}{2}; \quad \frac{\partial(M_{g(z_2)})}{\partial M} = \frac{z_2}{l}; \quad \frac{\partial(M_{g(z_2)})}{\partial P} = \frac{z_2}{2}; \quad \frac{\partial(M_{g(z_2)})}{\partial M_0} = 1 - \frac{z_2}{l}$$

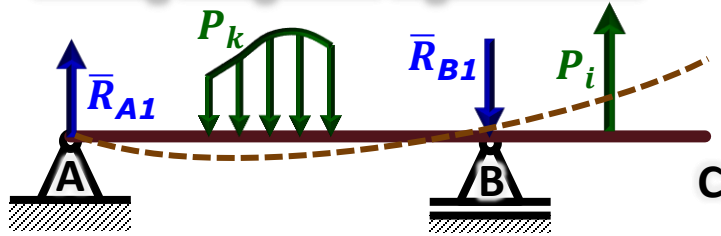
3° Wyznaczanie szukanych odkształceń:

$$\begin{aligned} \alpha_B &= \frac{1}{EJ_x} \int_0^l M_g \frac{\partial(M_g)}{\partial M_0} dl = \frac{1}{EJ_x} \int_0^{l/2} \left(ql^2 - q \frac{z_1^2}{2} \right) \left(\frac{z_1}{l} \right) dz_1 + \frac{1}{EJ_x} \int_0^{l/2} \left(2ql \cdot z_2 - q \frac{z_2^2}{2} \right) \left(1 - \frac{z_2}{l} \right) dz_2 \\ &= \frac{1}{EJ_x} \int_0^{l/2} \left(qlz_1 - \frac{qz_1^3}{2l} \right) dz_1 + \frac{1}{EJ_x} \int_0^{l/2} \left(2qlz_2 - 2qz_2^2 - \frac{qz_2^2}{2} + \frac{qz_2^3}{2l} \right) dz_2 = \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{ql^3}{8} - \frac{ql^3}{128} + \frac{ql^3}{4} - \frac{ql^3}{12} - \frac{ql^3}{48} + \frac{ql^3}{128} \right) \\ &= \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{6ql^3}{48} + \frac{12ql^3}{48} - \frac{4ql^3}{48} - \frac{ql^3}{48} \right) \rightarrow \alpha_B = \frac{13ql^3}{48EJ_x} \end{aligned}$$

por. z przykładem 1.3 z Wykładu 1

4.9. Zasada minimum energii - twierdzenie Menabrea

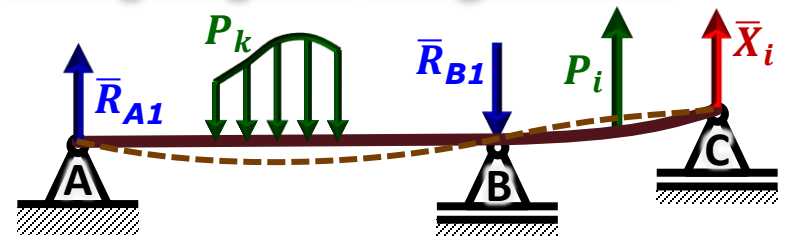
Układy statycznie wyznaczalne



Energia sprężysta jest funkcją wyłącznie sił czynnych (P_i):

$$U_1 = f_{U1}(P_1, \dots, P_i, \dots, P_n)$$

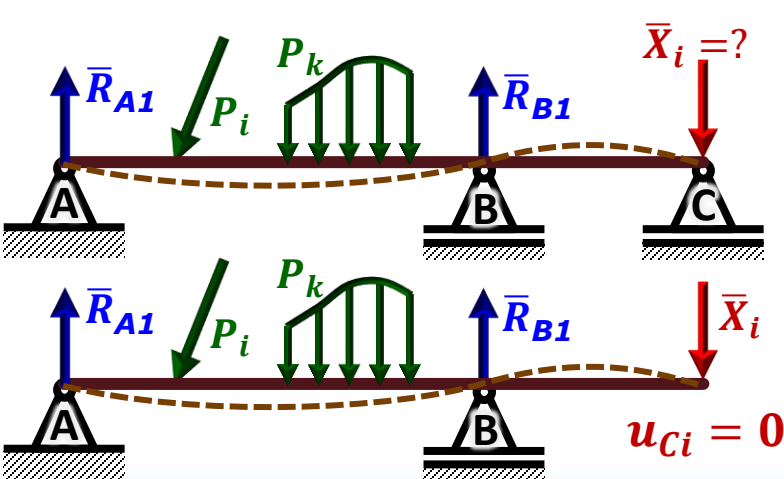
Układy statycznie niewyznaczalne



Energia sprężysta jest funkcją sił czynnych (P_i) oraz reakcji hiperstatycznych (X_i)¹⁾⁻²⁾

$$U_2 = f_{U2}(P_1, \dots, P_n, X_1, \dots, X_n)$$

- 1) w układzie statycznie niewyznaczalnym, może być zgromadzona energia sprężysta, mimo braku obciążenia czynnego;
- 2) w układzie n -krotnie statycznie niewyznaczalnym za reakcje hiperstatyczne (nadliczbowe) może być uznanych dowolnych n reakcji.



Z warunków brzegowych: $u_i = 0$

Z twierdzenia Castigliano: $u_i = \frac{\partial U}{\partial X_i}$

Tw. Menabrea*:

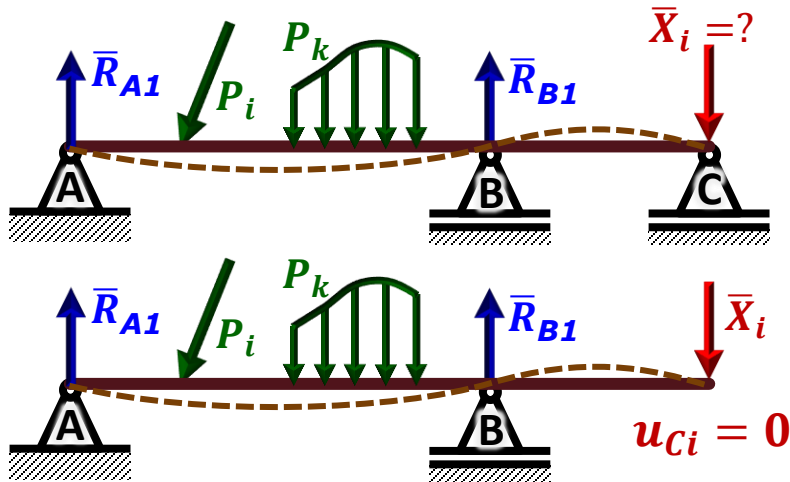
$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = 0$$



Pochodna cząstkowa energii sprężystej układu liniowo-sprężystego względem reakcji hiperstatycznej jest równa zero.

*Luigi Federico Menabrea (1809-1896) – włoski inżynier, matematyk, generał i polityk.

4.9. Zasada minimum energii - twierdzenie Menabrea



Pochodna cząstkowa energii sprężystej układu liniowo-sprężystego względem dowolnej reakcji hiperstatycznej jest równa zero.

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = 0$$

Komentarze: _____

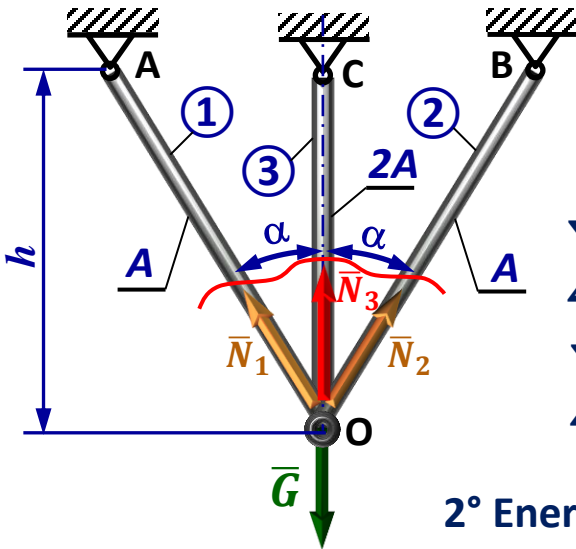
- 1) Dla układów n -krotnie statycznie niewyznaczalnych, twierdzenia Menabrea pozwala uzupełnić równania równowagi statycznej o n równań dodatkowych i tym samym wyznaczyć reakcje hiperstatyczne:

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad X_i = \dots, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n$$

- 2) Jeśli pochodna cząstkowa energii sprężystej układu jest równa zero, tzn. że **energia sprężysta osiąga wartość ekstremalną**, a w tym przypadku – minimum. Z tego powodu twierdzenie Menabrea nazywane jest również **zasadą minimum energii**. Oznacza to, że chociaż przy zadanym obciążeniu układu statycznie niewyznaczalnego istnieje nieskończenie wiele kombinacji wartości reakcji, spełniających równania równowagi statycznej, to reakcje te przyjmą takie wartości, a ustrój w związku z tym taki kształt, że jego energia sprężysta będzie minimalna. Tak rozumiane twierdzenie Menabrea nie dotyczy wyłącznie reakcji hiperstatycznych pochodzących od sztywnych podpór – co jest przypadkiem szczególnym twierdzenia Castigliano – lecz może być rozszerzone o hiperstatyczne siły wewnętrzne (N , T , M_g) w przekroju myślowym układu sprężystego.

4.10. Twierdzenie Menabrea – zastosowanie

Przykład 4.4: Element o ciężarze G został podwieszony na konstrukcji jak na rysunku, będącej symetrycznym układem trzech prętów, z których środkowy ma dwukrotnie większe pole przekroju poprzecznego w stosunku do prętów skrajnych. Obliczyć siły normalne działające w poszczególnych prętach.



Dane: $G=80$ kN, $A_3=2A_1=2A_2$, $E_1=E_2=E_3$, $\alpha=30^\circ$

Szukane: N_1, N_2, N_3

1° Warunki równowagi statycznej:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \Rightarrow -N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha = 0 \Rightarrow N_1 = N_2 = N_{12}$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \Rightarrow N_3 + 2N_{12} \cos \alpha - G = 0 \Rightarrow N_{12} = \frac{G - N_3}{2 \cos \alpha}$$

2° Energia sprężysta konstrukcji:

$$U = \frac{N^2 l}{2EA}$$

$$U = \frac{N_{12}^2 \cdot (h/\cos \alpha)}{2AE} + \frac{N_3^2 \cdot h}{2 \cdot 2AE} \Rightarrow U = \frac{(G - N_3)^2 \cdot h}{4 \cdot AE \cdot \cos^2 \alpha \cdot \cos \alpha} + \frac{N_3^2 \cdot h}{4AE}$$

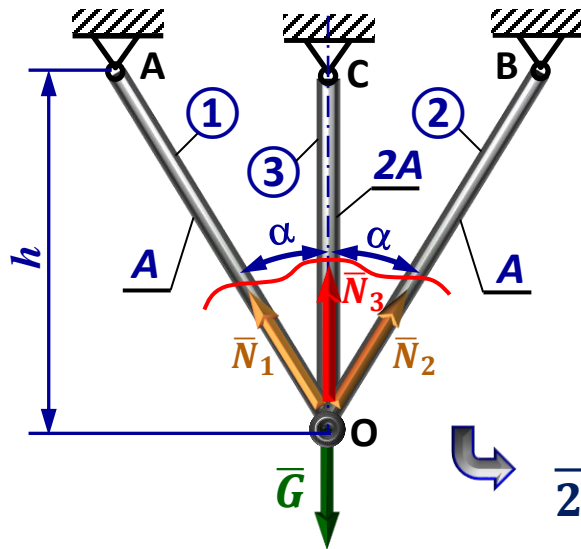
$$N_{12} = \frac{G - N_3}{2 \cos \alpha} \Rightarrow U = \frac{G^2 \cdot h}{4AE \cdot \cos^3 \alpha} - \frac{2GN_3 \cdot h}{4AE \cdot \cos^3 \alpha} + \frac{N_3^2 \cdot h}{4AE \cdot \cos^3 \alpha} + \frac{N_3^2 \cdot h}{4AE}$$

$$U = \frac{G^2 h}{4AE \cdot \cos^3 \alpha} - \frac{GN_3 h}{2AE \cdot \cos^3 \alpha} + \frac{N_3^2 h}{4AE \cdot \cos^3 \alpha} + \frac{N_3^2 h}{4AE}$$

4.10. Twierdzenie Menabrea – zastosowanie

Przykład 4.4: Dane: $G=80$ kN, $A_3=2A_1=2A_2$, $E_1=E_2=E_3$, $\alpha=30$

Szukane: N_1, N_2, N_3



$$U = \frac{G^2 h}{4AE \cdot \cos^3 \alpha} - \frac{GN_3 h}{2AE \cdot \cos^3 \alpha} + \frac{N_3^2 h}{4AE \cdot \cos^3 \alpha} + \frac{N_3^2 h}{4AE}$$

3° Z twierdzenie Menabrea ($X_i \equiv N_3$):

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial N_3} = \frac{2N_3 h}{4AE \cos^3 \alpha} + \frac{2N_3 h}{4AE} - \frac{Gh}{2AE \cos^3 \alpha} = 0$$

$$\frac{N_3 h}{2AE \cos^3 \alpha} + \frac{N_3 h}{2AE} = \frac{Gh}{2AE \cos^3 \alpha} \Rightarrow N_3 \left(\frac{1}{\cos^3 \alpha} + 1 \right) = \frac{G}{\cos^3 \alpha}$$

$$N_3 \left(\frac{1 + \cos^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} \right) = \frac{G}{\cos^3 \alpha} \Rightarrow N_3 (1 + \cos^3 \alpha) = G \Rightarrow N_3 = \frac{G}{1 + \cos^3 \alpha}$$

$$N_3 = \frac{80}{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3} \Rightarrow N_3 = 48,5 \text{ kN}$$

$$N_{12} = \frac{80 - 48,5}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow N_{12} = 17,9 \text{ kN}$$

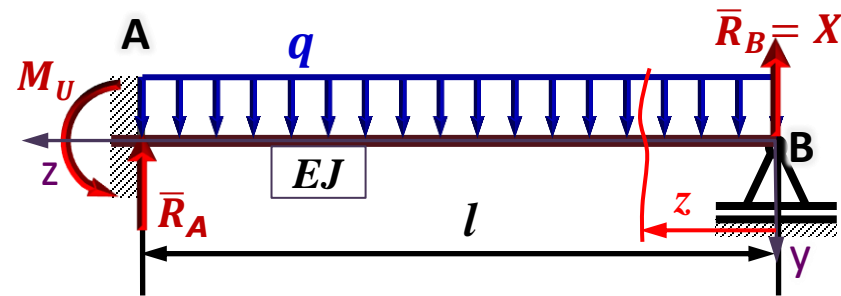
$$N_{12} = \frac{G - N_3}{2 \cos \alpha}$$

4.10. Twierdzenie Menabrea – zastosowanie

Przykład 4.5: Korzystając z twierdzenia Menabrea wyznaczyć reakcje podpór belki jak na rysunku.

Dane: $EJ = \text{const}$, q , l

Szukane: R_A , R_B , M_A



1° Warunki równowagi statycznej:

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0 \Rightarrow M_U - \frac{ql^2}{2} + R_B l = 0 \quad (s1)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \Rightarrow R_A - ql + R_B = 0 \quad (s2)$$

2° Równanie momentu gnącego i jego pochodnej po reakcji hiperstatycznej (przyjęto $X = R_B$):

$$0 \leq z \leq l: M_{g(z)} = R_B z - q \frac{z^2}{2}; \quad \frac{\partial M_{g(z)}}{\partial X} = \frac{\partial M_{g(z)}}{\partial R_B} = z$$

$$3^\circ \text{ Twierdzenie Menabrea: } \frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial U}{\partial R_B} = \frac{1}{EJ} \int_0^l M_{g(z)} \frac{\partial (M_{g(z)})}{\partial R_B} dz = 0 \Rightarrow$$

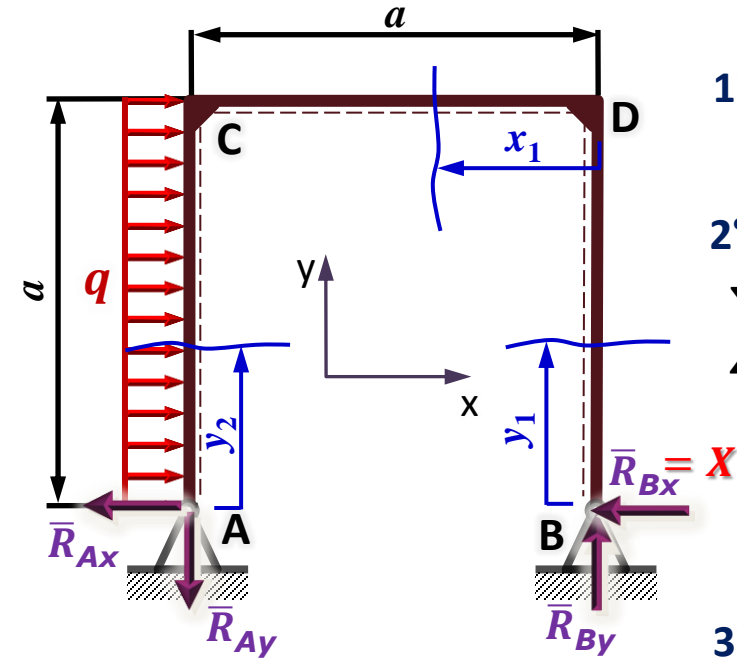
$$\int_0^l \left(R_B z - q \frac{z^2}{2} \right) z dz = 0 \Rightarrow \int_0^l \left(R_B z^2 - q \frac{z^3}{2} \right) dz = 0 \Rightarrow \left[R_B \frac{z^3}{3} - q \frac{z^4}{8} \right]_0^l = 0 \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} R_B = \frac{3}{8} ql \\ M_U = \frac{ql^2}{8} \end{array} \right\} (s1) \quad \left. \begin{array}{l} R_B = \frac{3}{8} ql \\ R_A = \frac{5}{8} ql \end{array} \right\} (s2)$$

4.10. Twierdzenie Menabrea – zastosowanie

Przykład 4.6: Rozwiązać ramę jak na rysunku, wykorzystując twierdzenie Menabrea do wyznaczenia reakcji hiperstycznej.

Dane: $EJ = \text{const}$, q , a Szukane: Wykresy $T(z)$, $M_g(z)$



1° Układ jednokrotnie statycznie niewyznaczalny.

Przyjmijmy: $R_{Bx} = X$

2° Warunki równowagi statycznej:

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0 \Rightarrow -\frac{qa^2}{2} + R_{By}a = 0 \Rightarrow R_{By} = \frac{qa}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \Rightarrow -R_{Ay} + R_{By} = 0 \Rightarrow R_{Ay} = \frac{qa}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \Rightarrow qa - R_{Ax} - R_{Bx} = 0 \Rightarrow R_{Ax} = qa - R_{Bx}$$

3° Równania momentów gnących i ich pochodna po reakcji X :

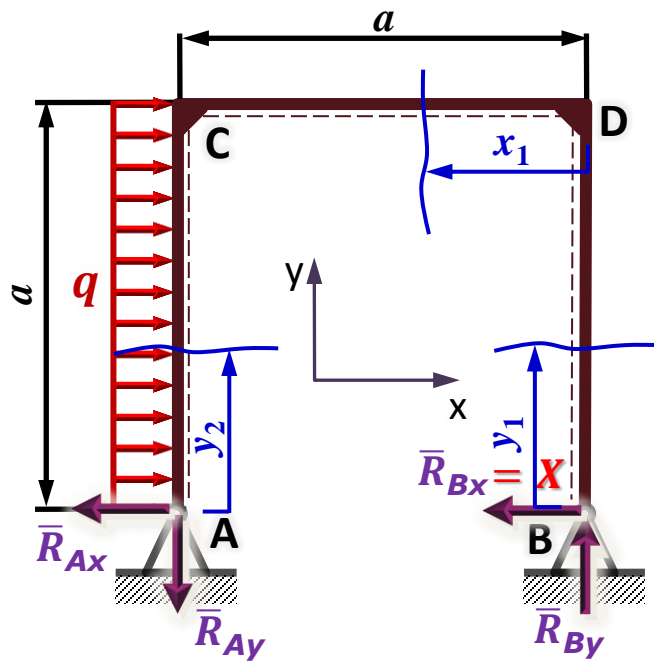
$$0 \leq y_1 \leq a: M_{g(y_1)} = -R_{Bx} \cdot y_1; \quad \frac{\partial M_{g(y_1)}}{\partial X} = \frac{\partial M_{g(y_1)}}{\partial R_{Bx}} = -y_1$$

$$0 \leq x_1 \leq a: M_{g(x_1)} = -R_{Bx} \cdot a + R_{By} \cdot x_1 = -R_{Bx} \cdot a + \frac{qa}{2} \cdot x_1; \quad \frac{\partial M_{g(x_1)}}{\partial X} = \frac{\partial M_{g(x_1)}}{\partial R_{Bx}} = -a$$

$$0 \leq y_2 \leq a: M_{g(y_2)} = (qa - R_{Bx}) \cdot y_2 - q \frac{y_2^2}{2} = qa \cdot y_2 - R_{Bx} \cdot y_2 - q \frac{y_2^2}{2}; \quad \frac{\partial M_{g(y_2)}}{\partial X} = \frac{\partial M_{g(y_2)}}{\partial R_{Bx}} = -y_2$$

4.10. Twierdzenie Menabrea – zastosowanie

Przykład 4.6: Dane: $EJ = \text{const}$, q , a Szukane: Wykresy $T(z)$, $M_g(z)$



3° Równania momentów gnących i ich pochodna po reakcji X :

$$0 \leq y_1 \leq a: M_{g(y_1)} = -R_{Bx} \cdot y_1; \quad \frac{\partial M_{g(y_1)}}{\partial R_{Bx}} = -y_1$$

$$0 \leq x_1 \leq a: M_{g(x_1)} = -R_{Bx} \cdot a + \frac{qa}{2} \cdot x_1; \quad \frac{\partial M_{g(x_1)}}{\partial R_{Bx}} = -a$$

$$0 \leq y_2 \leq a: M_{g(y_2)} = qa \cdot y_2 - R_{Bx} \cdot y_2 - q \frac{y_2^2}{2}; \quad \frac{\partial M_{g(y_2)}}{\partial R_{Bx}} = -y_2$$

4° Warunek minimum energii (tw. Menabrea):

$$\frac{\partial U}{\partial R_{Bx}} = 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^a R_{Bx} y_1^2 dy_1 + \int_0^a \left(R_{Bx} a^2 - \frac{qa^2}{2} x_1 \right) dx_1 + \int_0^a \left(R_{Bx} y_2^2 - qa y_2^2 + q \frac{y_2^3}{2} \right) dy_2 = 0$$

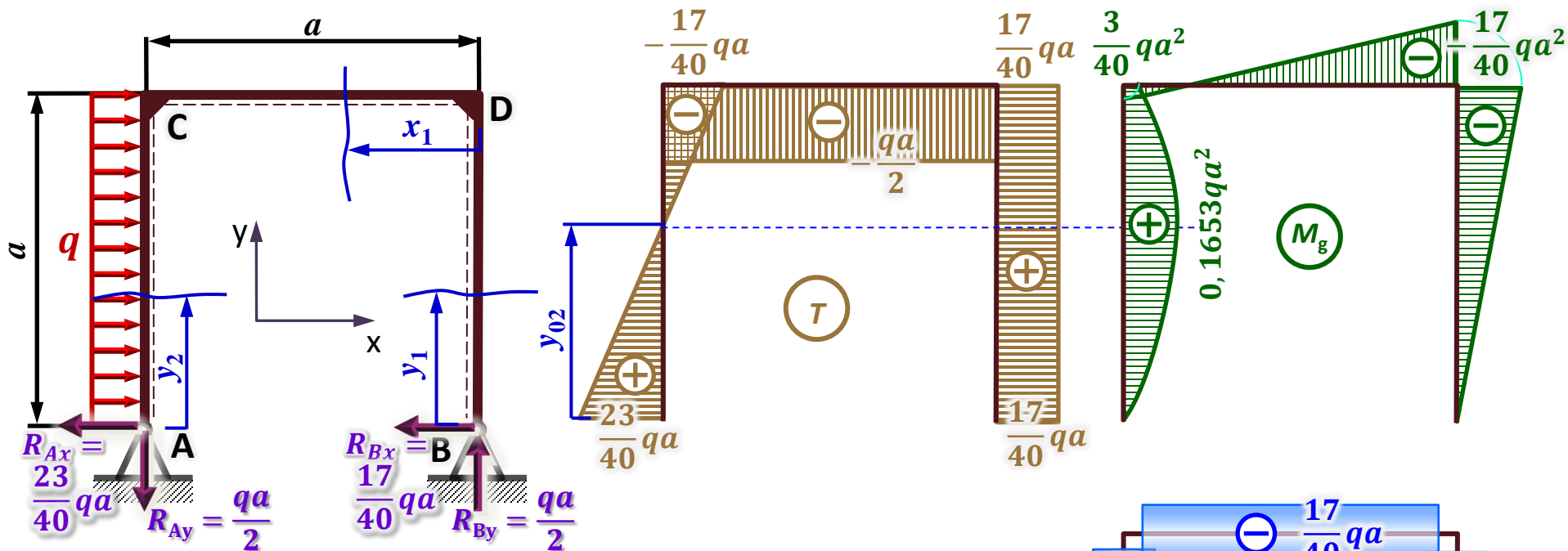
$$\int_0^a R_{Bx} y_1^2 dy_1 + \int_0^a \left(R_{Bx} a^2 - \frac{qa^2}{2} x_1 \right) dx_1 + \int_0^a \left(R_{Bx} y_2^2 - qa y_2^2 + q \frac{y_2^3}{2} \right) dy_2 = 0 \Rightarrow \boxed{R_{Bx} = \frac{17}{40} qa}$$

Powracając do warunków równowagi: $R_{Ax} = qa - R_{Bx} \Rightarrow \boxed{R_{Ax} = \frac{23}{40} qa}$

4.10. Twierdzenie Menabrea – zastosowanie

Przykład 4.6: Dane: $EJ = \text{const}$, q , a

Szukane: Wykresy $T(z)$, $M_g(z)$

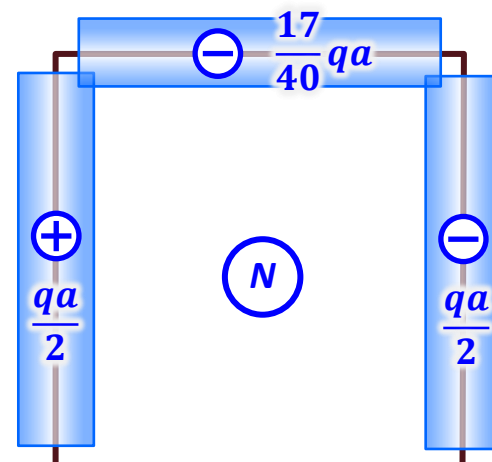


$$T_{(y02)} = \frac{23}{40} qa - qy_{02} = 0 \Rightarrow y_{02} = \frac{23}{40} a$$

$$0 \leq y_2 \leq a: M_{g(y2)} = \frac{23}{40} qay_2 - q \frac{y_2^2}{2};$$

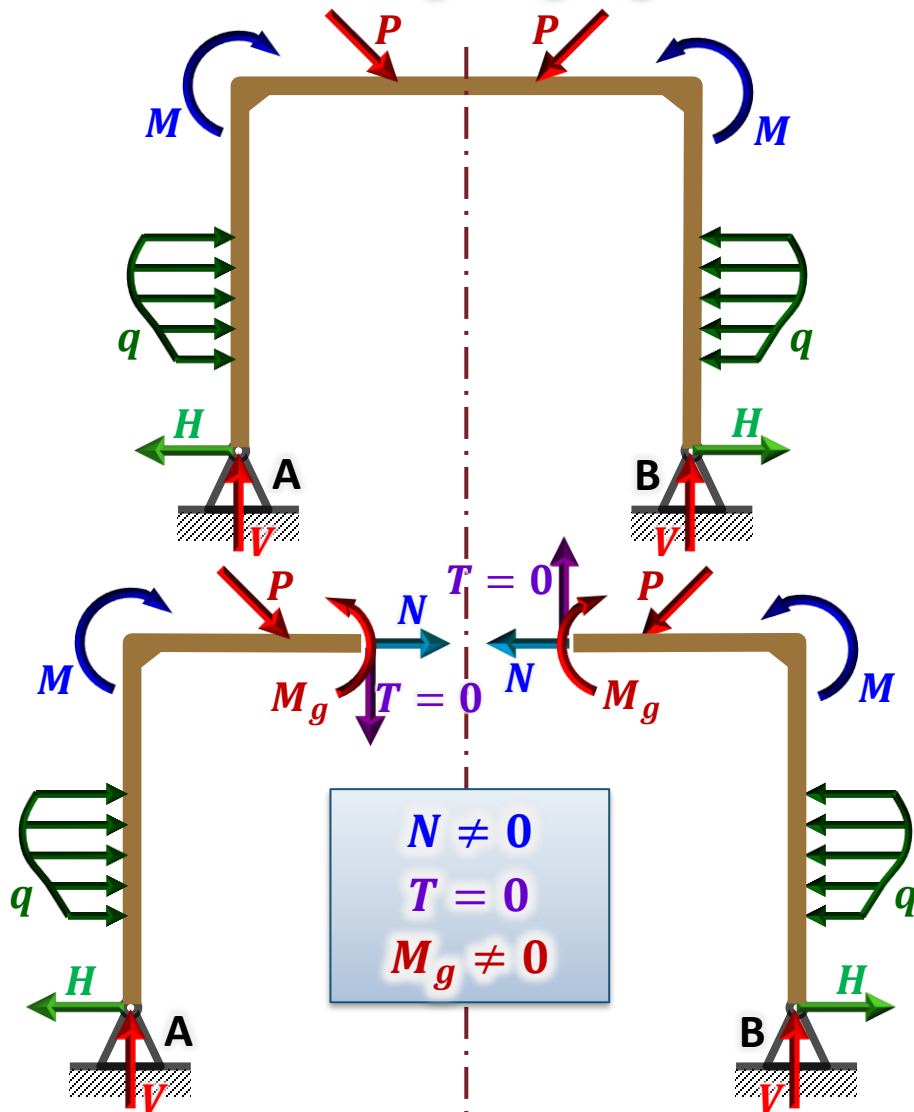
$$\hookrightarrow M_{g(y02)} = 0,1653 qa^2; M_{g(y2=a)} = \frac{3}{40} qa^2;$$

$$0 \leq y_1 \leq a: M_{g(y1)} = -\frac{17}{40} qay_1 \Rightarrow M_{g(y1=a)} = -\frac{17}{40} qa^2;$$

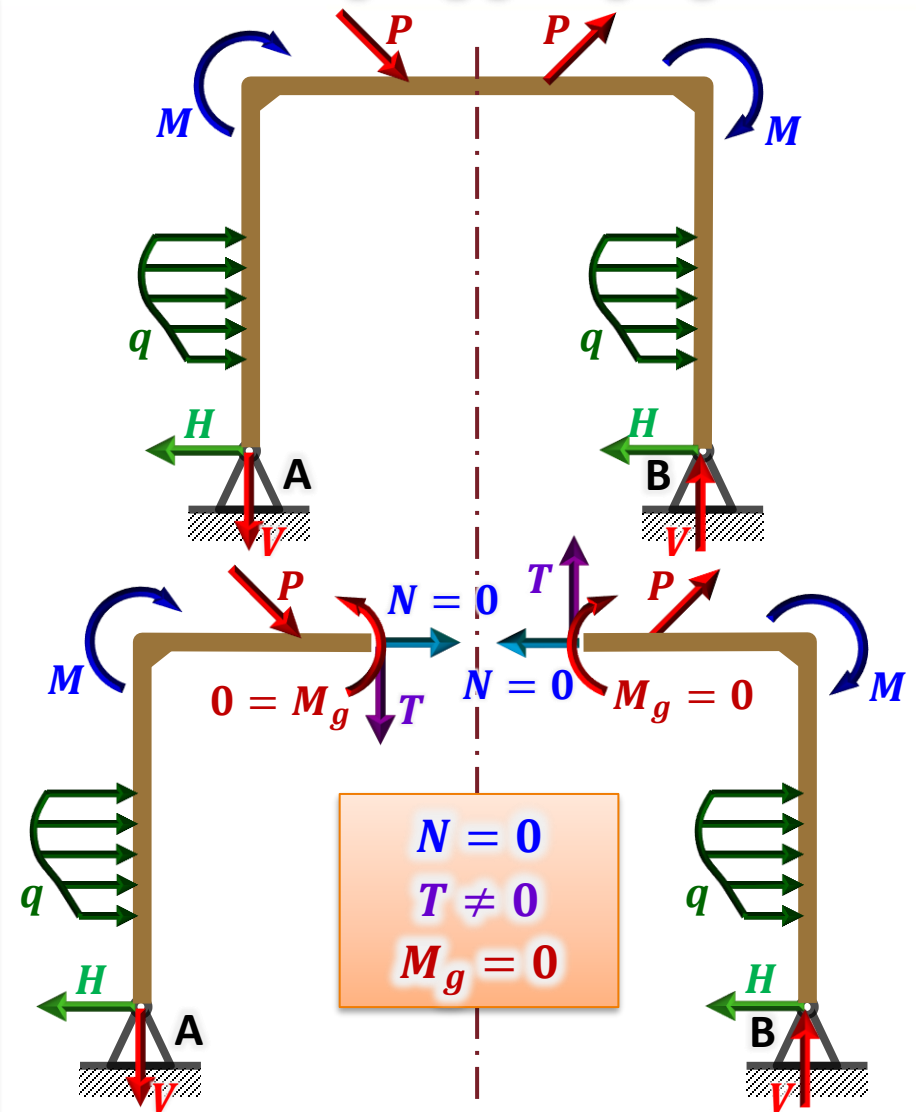


4.11. Zasada symetrii i antysymetrii

Układ symetryczny



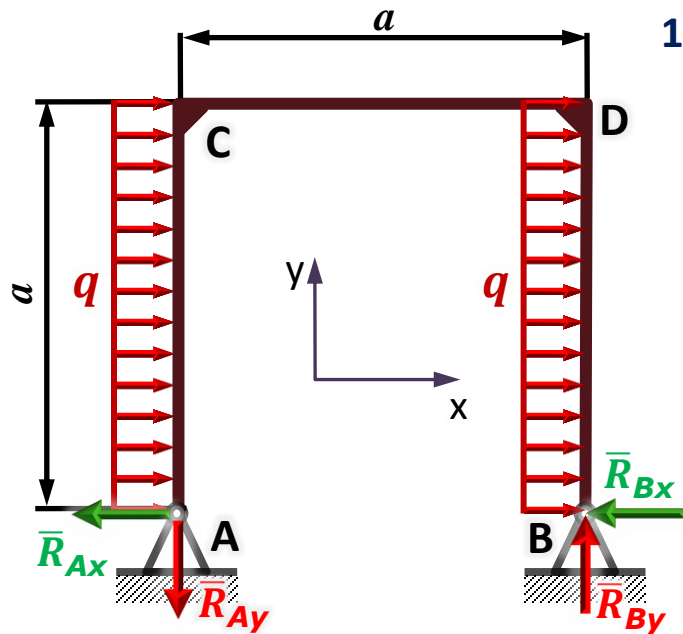
Układy antysymetryczny



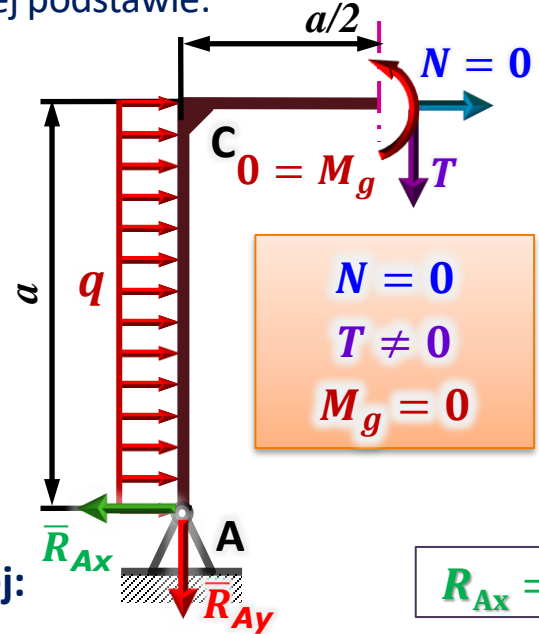
Zastosowanie powyższych zasad, tam gdzie to możliwe, pozwala uprościć/zweryfikować obliczenia.

4.10. Twierdzenie Menabrea – zastosowanie

Przykład 4.7: Wyznaczyć reakcje ramy jak na rysunku. Dane: $EJ = \text{const.}$, q , a ; Szukane: R_{Ax} , R_{Ay} , R_{Bx} , R_{By}



1° Układ jednokrotnie statycznie niewyznaczalny - antysymetryczny.
Na tej podstawie:



$$N = 0$$

$$T \neq 0$$

$$M_g = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} -R_{Ax} + qa + N &= 0 \\ N &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} R_{Ax} &= qa \\ R_{Bx} &= qa \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

2° Globalne warunki równowagi statycznej:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \Rightarrow -R_{Ax} - R_{Bx} - qa - qa = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_{iA} = 0 &\Rightarrow -\frac{qa^2}{2} - \frac{qa^2}{2} + R_{By}a = 0 \Rightarrow R_{By} = qa \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 &\Rightarrow -R_{Ay} + R_{By} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_{Ay} = qa$$